- **La duración del examen será de 1 hora y 15 minutos.**
- **Las notas y el procedimiento para la revisión del examen se comunicarán a través de Aula Virtual.**

Problema 1. (5/10 puntos)

Se considera un sistema de números máquina positivos en coma flotante en base 2. Cada número máquina se codifica en una palabra de 6 bits: 2 bits $(e_1\ e_2)$ para almacenar la información del exponente y 4 bits para almacenar los dígitos $(b_1\ b_2\ b_3\ b_4)$ de la mantisa, atendiendo a las siguientes representaciones:

Si $e=(e_1e_2)_2=(0\,0)_2=0$, $\quad \hat{x}=(0.b_1b_2b_3b_4)_2\times 2^0$ Número denormalizado

Si $e=(e_1\ e_2)_2\neq 0$, $\quad \hat{x}=(1.b_1b_2b_3b_4)_2\times 2^{e-1}$ Número normalizado

1.1. Calcular los números máquina (en formato decimal) y el contenido de los 6 bits que codifican los siguientes números: vmin valor del número máquina mínimo no nulo, vmax valor del número máquina máximo y los números reales 0.5, 1 y 3.5.
¿Qué valor decimal representa el número máquina codificado con $(e_1e_2)=(10)$ y $(b_1b_2b_3b_4)=(1110)$?
Completar la siguiente tabla:

Nº en formato decimal	Nº máquina	$e_1\ e_2$	$b_1\ b_2\ b_3\ b_4$
Vmin=			
Vmax=			
0.5			
1			
3.5			
		10	1110

1.2. Dar eps(1), eps(3.5) y eps(6.5). Justificar la respuesta.

1.3. Dar una cota del error relativo que se comete al aproximar un número real, en el rango de los números normalizados, por el número máquina normalizado más próximo en el sistema dado.
¿Cuántas cifras decimales significativas se garantizan con este sistema de números normalizados?

Problema 2. (5/10 puntos)

Dada la función $f(x)=x-sen(\frac{\pi}{2}x)$, se pide:

1. a. Calcular el polinomio de Hermite p(x) que interpola a dicha función en los puntos $x_0=-1$ y $x_1=0$.

   $(f(-1)=0, f'(-1)=1, f(0)=0, f'(0)=1-\frac{\pi}{2})$.

   b. Dar una cota del error de interpolación $|e(x)|=|f(x)-p(x)|$ en el intervalo [-1,0].

2. Calcular una función u(x) continua y con derivada continua en el intervalo [-1,2], definida como:

$$u(x)=\begin{cases} p(x); & x\in[-1,0] \\ q(x); & x\in[0,2] \end{cases}$$

donde p(x) y q(x) son polinomios de grados tres y dos, respectivamente, que interpole a f(x) en los datos dados en el apartado anterior $(f(-1)=0, f'(-1)=1, f(0)=0, f'(0)=1-\frac{\pi}{2})$. y en el dato adicional $f(2)=2$.

SOLUCIONES:

Problema 1

1.1.

Menor *número máquina* no nulo: $e=(00)_2=0$; $(b_1b_2b_3b_4)=(0000)\rightarrow \mathrm{v}_{\min}=(0.0001)_2\times 2^0=2^{-4}=1/16=0.0$

Mayor *número máquina*: $e=(11)_2=3$; $(b_1b_2b_3b_4)=(1111)\rightarrow \mathrm{v}_{\max}=(1.1111)_2\times 2^{3-1}=7.75$

$0.5=(0.1)_2=(0.100)_2 2^0\rightarrow e=0=(00)_2,\quad (b_1b_2b_3b_4)=(1000)$

$1=2^0=(1.0000)_2 2^0\rightarrow e=1=(01)_2,\quad (b_1b_2b_3b_4)=(0000)$

$3.5=(11.1)_2=(1.1100)_2 2^1\rightarrow e=2=(10)_2,\quad (b_1b_2b_3b_4)=(1100)$

$e=(10)_2=2$ y $(b_1b_2b_3b_4)=(1110)\rightarrow \hat{x}=(1.1110)_2\times 2^{2-1}=3.75$

1.2.

Epsilon de un número máquina x es la distancia entre x y el número máquina x_d inmediatamente mayor que x

Sabemos que eps(x)=$\mathrm{x}_d - x$=eps(1)$2^{\mathrm{exponente}(x)}$.

· eps(1)=$(1.0001)_2$-$(1.0000)_2$=2^{-4}=0.0625.

· eps(3.5)=$(1.1100)_2 2^1$-$(1.1101)_2 2^1$=$2^{-4}2^1=2^{-3}$=0.125.

· eps(6)=$(1.1000)_2 2^2$-$(1.1001)_2 2^2$=$2^{-4}2^2=2^{-2}$=0.25.

1.3. Dar una cota del error relativo que se comete al aproximar un número real x en el rango de los números normalizados por el número máquina normalizado $\hat{x}$ más próximo:

Error relativo=$\dfrac{|x-\hat{x}|}{|x|}\leq\dfrac{|\hat{x}_i-\hat{x}_d|}{2|x|}\leq\dfrac{1}{2}eps(1)=2^{-4}/2=2^{-5}=0.03125$

donde $\hat{x}$ es el número máquina más próximo a x, y $\hat{x}_i$ y $\hat{x}_d$ son los números máquina inmediatamente menor y mayor que x, respectivamente.

El número N de cifras decimales significativas garantizadas atendiendo a esta cota del error relativo es:

$\mathrm{N}=floor(-\log_{10}(\text{Error relativo}))\geq floor(-\log_{10}(2^{-5}))=floor(1.5051)=1$

Por tanto, está garantizada al menos 1 cifras decimal significativa.

Problema 2 (Solución)

1. $f(x) = x - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

a. El polinomio de Hermite $p(x)$ tiene que cumplir:

$$p(-1) = f(-1) = 0$$
$$p'(-1) = f'(-1) = 1$$
$$p(0) = f(0) = 0$$
$$p'(0) = f'(0) = 1 - \frac{\pi}{2}$$

Tabla de diferencias

x_k	$f(x_k)$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
-1	0			
		$f'(-1)=1$		
-1	0		$f[-1,-1,0]=-1$	
		$f[-1,0]=0$		$f[-1,-1,0,0]=2-\frac{\pi}{2}$
0	0		$f[-1,0,0]=1-\frac{\pi}{2}$	
		$f'(0)=1-\frac{\pi}{2}$		
0	0			

Polinomio de Hermite $p(x)$

$$p(x) = (x+1) - (x+1)^2 + \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)(x+1)^2 x$$

b. Cota del error de interpolación de Hermite ($x_0 = -1$ y $x_1 = 0$)

$$|e(x)| \leq \frac{M}{4!} \max_{x \in [x_0, x_1]} \left| (x-x_0)^2 (x-x_1)^2 \right|$$

$$M \geq |f^{IV}(x)| \; ; \; x \in [x_0, x_1]$$

$$|f^{IV}(x)| = \left| -\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right| \leq \left| -\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(-1)\right) \right| =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 = M$$

$$|e(x)| \leq \frac{(\pi/2)^4}{4!} \left(\left(\frac{x_1 - x_0}{2} \right)^2 \right)^2 = \frac{(\pi/2)^4}{4!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 =$$

$$= \frac{\pi^4}{4!\, 2^8}$$

2.

$$u(x) = \begin{cases} p(x) \; ; \; x \in [-1,0] \\ q(x) \; ; \; x \in [0,2] \end{cases}$$

- $u(x)$ función continua y con derivada continua en $[-1,2]$, es decir:

$$p(0) = q(0)$$
$$p'(0) = q'(0)$$

- $u(x)$ debe interpolar a $f(x)$ en los datos dados en el apartado anterior y además $f(2) = 2$. Se debe cumplir para $p(x)$:

$$\left.\begin{aligned} p(-1) &= f(-1) = 0 \\ p'(-1) &= f'(-1) = 1 \\ p(0) &= f(0) = 0 \\ p'(0) &= f'(0) = 1 - \tfrac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ $p(x)$ es el polinomio de Hermite calculado en el apartado 1

Se debe cumplir para $q(x)$:

$$q(0) = p(0) = 0$$
$$q'(0) = p'(0) = 1 - \tfrac{\pi}{2}$$
$$q(2) = f(2) = 2$$

x_k	$f(x_k)$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$
0	0		
		$f'(0) = 1 - \frac{\pi}{2}$	
0	0		$f[0,0,2] = \frac{\pi/2}{2} = \frac{\pi}{4}$
		$f[0,2] = 1$	
2	2		

Polinomio $q(x) = \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) x + \frac{\pi}{4} x^2$

$$u(x) = \begin{cases} (x+1) - (x+1)^2 + \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)(x+1)^2 x & ; \; x \in [-1,0] \\ \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) x + \frac{\pi}{4} x^2 & ; \; x \in [0,2] \end{cases}$$